

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
прикладной математики и  
информатики**

**А.М. Райгородский**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Диофантовы уравнения
<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	Математика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	2
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 4 (весенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 75 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Программу составил: Н.Г. Мощевитин, д-р физ.-мат. наук, профессор

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 12.02.2024

## Аннотация

Диофантовы приближения — раздел теории чисел, изучающий приближения действительных чисел рациональными числами, а в более широком смысле, вопросы, связанные с решением в целых числах линейных и нелинейных неравенств или систем неравенств с действительными коэффициентами. Диофантовы приближения названы в честь древнегреческого математика Диофанта, который занимался задачей решения алгебраических уравнений в целых числах — диофантовых уравнений. Методы теории диофантовых приближений основаны на применении непрерывных дробей, рядов Фарея, принципа Дирихле. Этому и посвящен данный курс.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

- изучение познакомить студентов с диофантовыми приближениями.

#### Задачи дисциплины

- познакомить студентов с понятием диофантового приближения;
- изучить основные понятия: Теорему Минковского, Теоремы Лежандра и Фату, Теорема Гурвица о диофантовых приближениях и др.;
- изучить неравенства для диофантовых экспонент.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- основные понятия диофантовых приближений;
- основные приближения;
- порядок приближения числа его подходящей дробью, представление натурального, функции меры иррациональности.

уметь:

- уметь доказывать (вместе со всеми деталями) рассказанные теоремы и ориентироваться в них.

владеть:

- навыками самостоятельной работы;
- навыками освоения большого объема информации;
- методами диофантовых приближений;

### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

#### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост.

		лекции	семинары	лаборат. работы	работа
1	Медианта двух рациональных дробей	4	4		8
2	Последовательности Штерна-Броко	2	2		8
3	Теорема Гурвица о диофантовых приближениях. Цепные дроби	2	2		8
4	Функция Минковского	6	6		8
5	Представление натурального числа	4	4		8
6	Теорема Минковского и совместные приближения нескольких чисел	2	2		8
7	Внутренние приближения	4	4		9
8	Функция меры иррациональности (одномерный случай)	2	2		9
9	Теоремы Лежандра и Фату	4	4		9
Итого часов		30	30		75
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

##### Семестр: 4 (Весенний)

##### 1. Медианта двух рациональных дробей

Дерево Фарей. Получение всех рациональных чисел с помощью последовательного взятия медиант. Ряды Фарей и их простейшие свойства.

##### 2. Последовательности Штерна-Броко

Последовательности Штерна-Броко и их простейшие свойства. Порождающее преобразование.

##### 3. Теорема Гурвица о диофантовых приближениях. Цепные дроби

Представимость вещественных чисел. Порядок приближения числа его подходящей дробью.

##### 4. Функция Минковского

Определение, непрерывность. Производная функции Минковского. Лемма Бlichfeldта. Теорема Минковского о выпуклом теле и ее различные доказательства.

##### 5. Представление натурального числа

Представление натурального числа суммой двух квадратов: геометрический подход. Представление натурального числа суммой четырех квадратов: геометрический подход. Основы арифметики кватернионов. Кватернионы в задаче о представлении натурального числа суммой четырех квадратов.

##### 6. Теорема Минковского и совместные приближения нескольких чисел

Метод Бlichfeldта. Теорема Спона.

##### 7. Внутренние приближения

Внутренние приближения на единичной окружности на плоскости. Внутренние приближения на единичной сфере в  $R^3$ . Теорема Клейнбока-Меррилла.

#### 8. Функция меры иррациональности (одномерный случай)

Подходящие дроби и наилучшие приближения.

#### 9. Теоремы Лежандра и Фату

Спектры Лагранжа и Дирихле и их максимальные и минимальные точки. Функция меры иррациональности (многомерный случай). Наилучшие совместные приближения и их простейшие свойства. Подпространства наилучших приближений. Неравенства для диофантовых экспонент.

### **5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

Стандартная учебная аудитория.

### **6. Перечень рекомендуемой литературы**

#### Основная литература

1. Классические диофантовы уравнения от двух неизвестных [Текст]/В. Г. Спринджук, -М., Наука, 1982

#### Дополнительная литература

1. Линейная алгебра [Текст] : учебник для вузов / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк .— 3 - е изд., доп. — М. : Наука, 1984 .— 295 с.

### **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

<http://dm.fizteh.ru/>

### **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

Не предусмотрено.

### **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

1. Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.
2. Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего пользоваться материалами лекций.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

**по направлению:** Прикладная математика и информатика  
**профиль подготовки:** Математика  
Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики  
кафедра дискретной математики  
**курс:** 2  
**квалификация:** бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 4 (весенний) - Дифференцированный зачет

**Разработчик:** Н.Г. Мощевитин, д-р физ.-мат. наук, профессор

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Диофантовы уравнения» обучающийся должен:

### знать:

- основные понятия диофантовых приближений;
- основные приближения;
- порядок приближения числа его подходящей дробью, представление натурального, функции меры иррациональности.

### уметь:

- уметь доказывать (вместе со всеми деталями) рассказанные теоремы и ориентироваться в них.

### владеть:

- навыками самостоятельной работы;
- навыками освоения большого объема информации;
- методами диофантовых приближений;

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по теме прошлого занятия.

## 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Определение диофантова уравнения. Примеры линейных, квадратичных и кубических диофантовых уравнений.
2. Метод перебора для решения диофантовых уравнений. Ограничения и примеры применения.
3. Алгоритм Евклида для нахождения наибольшего общего делителя. Связь с решением линейных диофантовых уравнений.
4. Теорема о линейных диофантовых уравнениях. Критерий разрешимости и описание общего решения.
5. Метод бесконечного спуска Ферма. Примеры применения для решения диофантовых уравнений.
6. Пифагоровы тройки. Формула для генерации пифагоровых троек. Примеры задач.
7. Уравнение Пелля. Метод цепных дробей для решения уравнения Пелля. Примеры.
8. Теорема Лагранжа о сумме четырех квадратов. Доказательство и следствия.
9. Диофантовы уравнения высших степеней. Теорема Ферма о невозможности решения уравнения  $x^n + y^n = z^n$  для  $n > 2$ . Последняя теорема Ферма.
10. Современные методы решения диофантовых уравнений.

### Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;

- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.